Z2011 Recuperatorio del Primer Parcial de Análisis Matemático II Fecha: 21-07-21

Ante la eventualidad de falla del sistema para subir el examen , enviarlo a : con una tolerancia de diez minutos posteriores al horario de cierre.

Prof. Amed

Apellido y Nombre :...

Los Teóricos son obligatorios únicamente para los alumnos que tienen nota mayor o igual a 8 en el segundo parcial

Teórico 1) Demostrar que si un campo escalar f es diferenciable en $\bar{X}_0 \Rightarrow f$ es contínua en $\bar{X}_0$

Teórico 2) a)Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in I_f$. Defina conjunto de nivel k de f

b)Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo / $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-4}{\sqrt{x.y}}$

P1) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ /f(x,y)= $\begin{cases} \dfrac{y^3 - y^2.x}{x^2+y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ \operatorname{sen}(3x+2y) & \text{si } y=0 \end{cases}$

Se pide :a)Determinar y Representar el Dominio de f. Analice si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (f(\bar{X}))$.

b)Analice continuidad de f en $\bar{X}0 = (0,0)$. c)Analice derivabilidad de f en $(0,0)$ $\forall \breve{u}$

d)Halle $\bar{\nabla} f(\bar{X}_0)$ con $\bar{X}_0 = (0,0)$ e)¿Se cumple: $\forall \breve{u}$: $f'(\overline{X_0}, \breve{u}) = \bar{\nabla} f(\overline{X_0}) \bullet \breve{u}$? f) Analice si f es diferenciable en $(0,0)$

P 2) Dada $z = f(u,v)$ / $f(u,v) = u + v^2$ con $(u,v) = (\ x^3 + x.y\ ,\ \varphi(x,y)\ )$ resulta $h = f \circ \bar{g}$.

$v = \varphi(x,y)$ está definida implícitamente por $v^2.x + 3\ln(y - v) - x^2 - y + 4 = 0$

a)Halle la ecuación del plano tangente en $\bar{P}_0 = (1,2,h(1,2))$ a la gráfica de h

b)Halle aproximadamente $h(1{,}03\ ;\ 1{,}98)$

P 3) Sea la ecuación : $2x + 5y - \dfrac{z}{2} - 6 = 0$ la del plano tangente en $\bar{X}0 = (1,1,z_0)$

a la gráfica de ecuación $z = h(x,y)$ / $h = f \circ \bar{g}$ con f diferenciable. $\bar{g}(x,y) = (2x^2 + 2y\ ,\ x^2 + 4y\ )$

Halle la derivada direccional máxima de f en $(4,5)$ y la dirección responsable.

P 4) Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ / $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z$

a – Halle la derivada direccional de "f" en $\overline{X_0} = (2,3,5)$ respecto del versor tangente a la curva "C" en $\overline{P_0} = (1,\ 1,\ 2)$ de la cual se sabe que está incluída en S_1 de ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y en la superficie S_2 de ecuación: $z = x^2 + y^2$

(Construya una función vectorial paramétrica para "C")

b – Represente la Curva y el versor tangente a la misma en dicho punto.

AM2	1° parcial Prec. Prof. Amed	HOJA N° 1/4 FECHA 21-7-21

T1 Demostrar que si un campo escalar f es diferenciable en $\bar{x}_0 \Rightarrow f$ es continua en $\bar{x}_0$

f diferenciable en $x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\bar{x}_0 + \vec{N}) - f(\bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \vec{N} + \varepsilon(\vec{N}) \|\vec{N}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{N} \to \vec{0}} \left[(\bar{x}_0 + \vec{N}) - f(\bar{x}_0) \right] = \lim_{\vec{N} \to \vec{0}} \left[\nabla f(\bar{x}_0) \cdot \vec{N} + \varepsilon(\vec{N}) \|\vec{N}\| \right] =$$

$$= \lim_{\vec{N} \to \vec{0}} (\bar{x}_0 + \vec{N}) - \underbrace{\lim_{\vec{N} \to \vec{0}} f(\bar{x}_0)}_{\text{(I)}\ f(\bar{x}_0)} = \underbrace{\lim_{\vec{N} \to \vec{0}} \nabla f\, \bar{x}_0 \cdot \vec{N}}_{\text{II} \to 0} + \underbrace{\lim_{\vec{N} \to \vec{0}} \varepsilon(\vec{N}) \|\vec{N}\|}_{\to 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{N} \to \vec{0}} (\bar{x}_0 + \vec{N}) - f(\bar{x}_0) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{\vec{N} \to \vec{0}} \vec{x}_0 + \vec{N} = f(\bar{x}_0) \Rightarrow f \text{ es continua en } x_0}$$

(I) f dif $\Rightarrow \bar{x}_0 \in Dom(f) \Rightarrow \exists \underbrace{f(\bar{x}_0)}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{\vec{N} \to \vec{0}} f(\bar{x}_0) = \underbrace{f(\bar{x}_0)}_{\in \mathbb{R}}$

(II) f dif $\Rightarrow \exists \nabla f(\bar{x}_0) \Rightarrow \lim_{\vec{N} \to \vec{0}} \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \underbrace{\vec{N}}_{\to \vec{0}} = 0$

NOTA

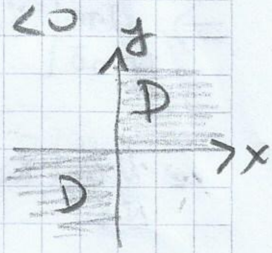
T2 a) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in I_f$. Definir conj. de nivel k de f

$$C_k = \{x \in D \,/\, f_{(x)} = k\}$$

b) Hallar el conj. de nivel 0 de f que representarlo

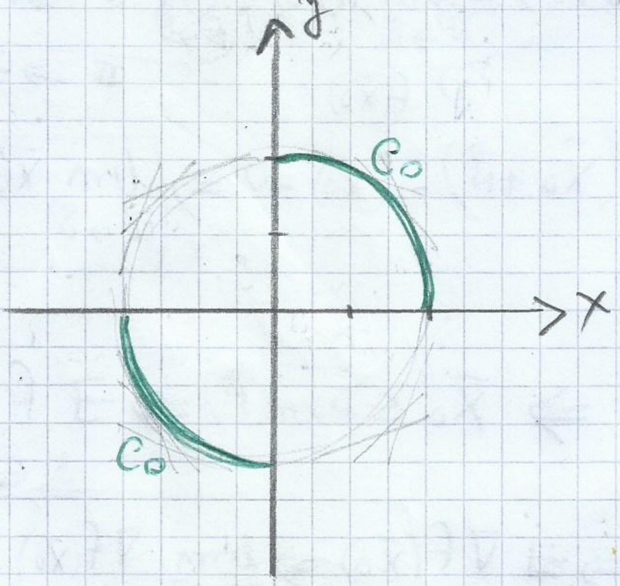
$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-4}{\sqrt{xy}}$$

$$\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 0\} \qquad x>0 \wedge y>0 \;\cup\; x<0 \wedge y<0$$



$$C_0 = \{(x,y) \in D \,/\, x^2+y^2-4 = 0\}$$

$$x^2+y^2=4$$



NOTA

AM2	1º parcial 1º rec. Prof Amed	HOJA N: 2/4 FECHA 21-7-21

(P1) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ /

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - y^2 x}{x^2+y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ \operatorname{sen}(3x+2y) & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) Determinar y representar el Dom(f) e Analizar si $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(\bar{x})$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \xrightarrow{y=0} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(3x) = 0$$

$$\xrightarrow{y\neq 0} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 - y^2 x}{x^2+y^2} = \lim_{xy\to 00} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{acot}} \underbrace{y}_{\to 0} - \lim_{xy\to 00} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{acot}} \underbrace{x}_{\to 0} = 0$$

$= 0$

$$\boxed{\lim_{(xy)\to(00)} f(x,y) = 0}$$

b) Analizar la continuidad de f en $\bar{x}_0 = (0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ \lim\limits_{(xy)\to(00)} f(x,y) = 0 \end{array}\right\} = \Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } (0,0)}$$

c) Analizar derivabilidad de f en (0,0) $\forall \breve{u}$ $\quad \breve{u} = (a,b)$, $a^2+b^2=1$

$$f'((0,0),\breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\breve{u}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} = *$$

(*) $\boxed{\text{si } b = 0}$: $= \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(3ha)}{h} \cdot \frac{3a}{3a}}_{\to 1} = \boxed{3a \quad \text{si } b = 0}$ $\quad 3a \neq 0$

(*) $\boxed{\text{si } b \neq 0}$: $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3b^3 - h^2b^2ha}{h^2a^2+h^2b^2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{\cancel{h^3}(b^3-b^2a)}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}}$

$= b^3 - b^2 a$

$$\boxed{f'((0,0),\breve{u}) = \begin{cases} 3a & \text{si } b=0 \\ b^3 - b^2 a & \text{si } b \neq 0 \end{cases}}$$

NOTA

f es derivable en (0,0) $\forall \breve{u}$

d) Hallar $\nabla f(\bar{x}_0)$ con $\bar{x}_0 = (0,0)$

$$f'_x(0,0) = f'((0,0),(1,0)) \underset{b=0}{\overset{3a}{=}} 3$$

$$f'_y(0,0) = f'((0,0),(0,1)) \underset{b\neq 0}{=} b^3 - b^2 \underset{0}{a} = 1$$

$$\boxed{\nabla f_{(0,0)} = (3,1)}$$

e) ¿Se cumple: $\forall \breve{u}\ f'(x_0, \breve{u}) = \nabla f(\bar{x}_0) . \breve{u}$?

NO. $\breve{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \longrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow b \neq 0$

x. def: $f'((0,0), \breve{u}) = b^3 - b^2 a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

x $\nabla \breve{u}$: $\nabla f_{(0,0)} . \breve{u} = (3,1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$ $\neq$

f) Analizar si f es diferenciable en (0,0)

f NO es diferenciable en (0,0) justamente por lo explicado en e porque si f es dif $\Rightarrow f'((0,0), \breve{u}) = \nabla f_{(0,0)}\ \breve{u}$ y NO se cumple

NOTA

AM2	1º parcial 1º rec. Prof. Amed	HOJA Nº 3 | 4 FECHA 21-7-21

(P2) Dada $z = f(u,v) \,/\, f(u,v) = u + v^2$ con $(u,v) = (x^3 + xy, \varphi(x,y))$ resulta $h = f \circ \bar{g}$.

$v = \varphi(x,y)$ está definida implícitamente por $v^2 x + 3\ln(y-v) - x^2 - y + 4 = 0$

a) Hallar la ecuación del plano tangente en $\bar{P}_0 = (1, 2, h(1,2))$ a la gráfica de h

$$\boxed{z = h(1,2) + h'_x(1,2)(x-1) + h'_y(1,2)(y-2)}$$

$$\bar{g}(x,y) = (x^3 + xy, \varphi(x,y)) \longrightarrow D\bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+y & x \\ \varphi'_x & \varphi_y \end{pmatrix}$$

$h = f(\bar{g})$, h dif

$$Dh(x,y) = Df(\bar{g}(x,y))\, Dg(x,y)$$

$$Dh(1,2) = Df(\bar{g}(1,2))\, D\bar{g}(1,2)$$

$$= Df(3,1)\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{h'_x}{3} & \underset{h'_y}{1} \end{bmatrix}$$

$h(1,2) = f(3,1) = 4$

Pl. tg.

$z = 4 + 3(x-1) + 1(y-2)$

$z = 4 + 3x - 3 + y - 2$

ec. pl. tg

$$\boxed{z = 3x + y - 1}$$

TFI: G

$G(x,y,v) = v^2 x + 3\ln(y-v) - x^2 - y + 4$

$$\varphi'_x(1,2) = -\frac{G'_x(1,2,h(1,2))}{G'_v(1,2,h(1,2))}$$

$$\varphi'_y(1,2) = -\frac{G'_y(1,2,h(1,2))}{G'_v(1,2,h(1,2))}$$

$$G(1,2,v) = 0 = \underbrace{v + 3\ln(2-v) - 1^2 - 2 + 4}_{v=1}$$

$\bar{P}_0 = (1,2,1)$

$G'_x = v^2 - 2x \rightarrow G'_x(1,2,1) = -1$

$G'_y = \frac{1}{y-v} - 1 \rightarrow G'_y(1,2,1) = 0$

$G'_v = 2vx - \frac{3}{y-v} \rightarrow G'_v(1,2,1) = -1$

$\varphi'_x(1,2) = -\frac{-1}{-1} = -1 \qquad \varphi'_y(1,2) = 0$

$\bar{g}(1,2) = (3,1)$

$\nabla f(u,v) = (1, 2v) \rightarrow \nabla f(3,1) = (1,2)$

b) Hallar, aprox, $h(1{,}03;\ 1{,}98)$

$h(1{,}03;\ 1{,}98) \cong 3 \times 1{,}03 + 1{,}98 - 1$

$$\boxed{h(1{,}03;\ 1{,}98) \cong 4{,}07}$$

NOTA

P3) Sea la ec. $\boxed{2x+5y-\frac{z}{2}-6=0}$ la del plano tangente en $\bar{X}_0=(1,1,z_0)$ a la gráfica de ecuación $z=h(x,y)$ / $h=f\circ\bar{g}$ con f diferenciable. $g(x,y)=(2x^2+2y,\ x^2+4y)$

Hallar la derivada direccional máxima de f en $(4,5)$ y la dirección responsable

$$2x+5y-\frac{z}{2}=6 \quad \equiv \quad 4x+5y-z=6 \Rightarrow \boxed{z=4x+5y-6}$$

en $(1,1,z_0) \Rightarrow z_0=4+5-6$

$z_0=3$

$$\boxed{\bar{X}_0=(1,1,3)}$$

ec. pl. tang a h en $(1,1,3)$: $z=h_{(1,1)}+h'_x{}_{(1,1)}(x-1)+h'_y{}_{(1,1)}(y-1)$

ec. enunciado $z=4x+5y-6$

$$\Rightarrow h'_x{}_{(1,1)}=4 \qquad h'_y{}_{(1,1)}=5$$

$\bar{g}=(2x^2+2y,\ x^2+4y) \to$ diferenciable

$h=f(\bar{g}(x,y))$ es dif (composic dif)

$\bar{g}_{(1,1)}=(4,5)$

$D\bar{g}=\begin{pmatrix}4x & 2y\\ 2x & 4\end{pmatrix}$

$$Dh_{(x,y)}=Df(\bar{g}(x,y))\,D\bar{g}(x,y)$$

$$Dh_{(1,1)}=Df(\bar{g}_{(1,1)})\,D\bar{g}_{(1,1)}$$

$$=Df(4,5)\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$[4\quad 5]=[f'_x{}_{(4,5)}\quad f'_y{}_{(4,5)}]\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=[\underbrace{4f'_x+2f'_y}_{4}\quad \underbrace{2f'_x+4f'_y}_{5}]$$

$$\begin{cases}4f'_x+2f'_y=4\\ 2f'_x+4f'_y=5\end{cases} \to f'_x{}_{(4,5)}=1/2 \qquad f'_y{}_{(4,5)}=1$$

$$f'((4,5),\check{r})\Big|_{máx}=\|\nabla f_{(4,5)}\|=\sqrt{(1/2)^2+1^2}=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}=f'((4,5),\check{r})\Big|_{máx}}$$

$$\check{u}_{máx}=\left(\frac{1/2}{\frac{\sqrt{5}}{2}},\ \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right) \to \boxed{\check{u}=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

NOTA

AM2	1º parcial 1º rec Prof. Arned	HOJA Nº 4/4 FECHA 21-7-21

(P4) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y,z) = x^2+y^2-2z$

a) Hallar la derivada direccional de f en $\bar{X}_0 = (2,3,5)$ respecto del vector tangente a C en $\bar{P}_0 = (1,1,2)$ de la cual se sabe que está incluida en S_1 de ec: $x^2+y^2+z^2=6$ y en la Sup. S_2 de ec: $z = x^2+y^2$

(Construir una función vectorial paramétrica para C)

$$C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \to z+z^2=6 \to \left.\begin{matrix} z=2 \\ \cancel{z=-3} \end{matrix}\right\} \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2 \end{cases}$$

$z \geq 0$

$$\boxed{C: \bar{\beta}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), 2) \quad t \in [0, 2\pi]}$$

$\bar{P}_0 \in C \Rightarrow (1,1,2) = (\sqrt{2}\cos(t_0), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t_0), 2)$

$$\left.\begin{cases} \sqrt{2}\cos(t)=1 \\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t)=1 \\ 2=2 \checkmark \end{cases}\right\} \cos(t) = \mathrm{sen}(t) \to \frac{\mathrm{sen}(t)}{\cos(t)} = 1$$

$tg(t) = 1 \to t = \frac{\pi}{4}$

$\bar{\beta}'(t) = (-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t), 0)$

$\bar{\beta}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-1, 1, 0) \longrightarrow \boxed{\breve{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}$

f es diferenciable $\Rightarrow f'((2,3,5), \breve{v}) = \nabla f(2,3,5) \cdot v$

$$\left.\begin{matrix} f'_x = 2x \\ f'_y = 2y \\ f'_z = -2 \end{matrix}\right\} \nabla f(2,3,5) = (4,6,-2) \Rightarrow f'((2,3,5),\breve{v}) = (4,6,-2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) =$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{f'((2,3,5),\breve{v}) = \sqrt{2}}$$

b) Representar la curva y el versor tang.